**ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Кафедра компьютерных технологий

**Инструкции и методические указания   
к выполнению лабораторных работ**

«Вычислительная математика»

|  |  |
| --- | --- |
| **Направление подготовки:** | *- 09.03.01 - Информатика и вычислительная техника*. |
| **Профили подготовки:** | *- Программирование информационных систем;  Администрирование информационных систем;  Информационные технологии в дизайне.* |
| **Квалификация (степень) выпускника:** | *- Академический бакалавр.* |
| **Формы контроля** | 2 модульных контроля, экзамен |
| **Форма обучения:** | *- дневная, ускоренная* |

Донецк 2020

Общие указания

Некоторые лабораторные работы могут реализовываться либо посредством программирования поставленных в инструкциях задач, либо с вычислениями в среде **WolframAlpha** и дополнительными письменными тестами, варианты заданий которых выдаются и сразу же выполняются в лабораториях кафедры. Программирование может осуществляться в любых средах, с использованием любых пакетов и библиотек. При этом могут использоваться сторонние коды различных блоков для своей программы, при условии, что студент в них разобрался.

Примерные тексты заданий имеются в [программе дисциплины](http://tolstykh.com/docs/%D0%A3%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8B/%D0%92%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B0%20-%20%D0%92%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.docx) и соответствуют модульным и экзаменационным заданиям. В любом случае студент должен знать ответы на все контрольные вопросы, приведенные в конце указаний к каждой лабораторной работе.

Таким образом, к лабораторным работам, контрольным вопросам надо готовиться заранее дома, а в лабораториях выяснять свои вопросы, консультироваться и сдавать работы.

Если студент выбрал путь «непрограммирования», то он может претендовать не более чем на 70% от баллов, указанных в критериях оценки лабораторной работы (см. в конце данных инструкций).

Все студенты должны оформлять отчет:

* Стандартная титульная страница;
* Краткое описание задания, согласно конкретному варианту;
* Описание преобразований исходного задания к математическим выражениям, которые непосредственно вычисляются, программируются;
* Исходный код программы (для тех, кто программировал) и полученные результаты в наглядном виде: таблицы, рисунки,
* Выводы о проделанной работе: получен ли результат, можно ли ему доверять, какой метод/алгоритм лучше и почему.

**Вычисления с плавающей точкой***(Обязательно всеми программируется)*

* 1. Найти границы начала машинного ноля и машинной бесконечности для вещественных чисел стандартной и повышенной точности. Соответствуют ли полученные значения действительности?
  2. Ряд Тейлора для функции ошибок имеет вид:



Этот ряд сходится для всех *x*.

Вычислить erf(3) по указанной формуле с точно­стью до нулевого члена ряда для следующих случаев:

* Без преобразований исходной формулы;
* Сделать расчёт факториала с числом *n* целого типа,
* Сделать расчёт факториала сделать с числом *n* вещественного типа.
* Повторить расчеты, изменив формулу функции ошибок с вычислением очередного члена ряда через предыдущий член *an=kan*-1, т.е. найти *k* и таким образом избавиться от факториала.

Объяснить все четыре полученных результата. Каким знакам (цифрам) в результате erf(3) доверять нельзя? Была ли катастрофическая потеря верных знаков? В каких знаках делались округления?

***Контрольные вопросы***

1. Какова причина возникновения округлений при работе с вещественными числами?
2. Что такое «катастрофическая потеря верных знаков»?
3. Что такое и как проявляют себя исчезновение и переполнение вещественных чисел?
4. Почему величина дискретности вещественных чисел компьютера разная для разных порядков чисел?
5. Что такое накопление вычислительных погрешностей? Напишите пример алгоритма, накапливающего вычислительные погрешности.
6. Что такое чувствительность решения задачи к её параметрам, и к чему может приводить высокая чувствительность отдельных параметров?

**Решение системы линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента**

Для тех, кто программирует, необходимо написать программу метода Гаусса для решения системы *n* линейных уравнений *Ax*=*f*. Продемонстрировать её работоспособность на примере решения системы линейных уравнений с матрицей Гильберта *A*, элементы которой *aij* =1/(*i*+*j*-1), *i*,*j*=1.. *n*. Свободный член системы уравнений задайте в виде *fi* = *n*/*i2*. Проведите расчёты без выбора и с выбором главного элемента матрицы. Можно взять в Internet сторонние коды метода Гаусса и модифицировать их под поставленную задачу.

Для тех, кто не программирует, сделайте соответствующее расчётное задание с преподавателем в лаборатории.

Всем, кто программирует и не программирует, необходимо найти число обусловленности рассматриваемой матрицы – Cond(*A*)=||*A*||·||*A*-1||. Это можно сделать в сторонних приложениях, например, Python, MathCad…

Размерность *n* для системы уравнений возьмите в соответствии с вашим номером в списке группы и добавьте к нему цифру 3.

Сделайте выводы из всех полученных результатов.

***Контрольные вопросы***

1. Каков порядок количества вычислений с вещественными числами в методах решения линейных систем *n* уравнений: методом Крамера, методом Гаусса, методом прогонки?
2. Что такое главный (ведущий) элемент в методе Гаусса? Как он вычисляется?
3. Как методом Гаусса находят обратные матрицы?
4. Что такое хорошо обусловленная матрица? Каковы пределы обусловленности?
5. Какой матрицей должна характеризоваться система линейных уравнений для решения её методом прогонки?
6. В чём суть итерационных методов решения систем линейных уравнений?

**Восстановление дискретно заданной функций**

При получении задания необходимо заполнить табличные значения некоторой заранее неизвестной функции. Восстановить функцию и построить её график:

1. Для тех, кто программирует, сделать интерполяцию кубическими сплайнами;
2. Всем, кто программирует и не программирует, сделать интерполяцию полиномом в форме Лагранжа. Можно сделать через **WolframAlpha** (смотрите http://www.wolframalpha-ru.com/search?q=интерполяция);
3. Всем сделать приближение (аппроксимация, регрессия) методом наименьших квадратов с помощью **WolframAlpha** (смотрите <http://www.wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha_18.html>). Опробовать несколько типов аппроксимаций (регрессионных моделей), оценить их качество по коэффициенту детерминации. Для интерпретации результатов регрессий читайте материал [wiki/Коэффициент\_детерминации](ru.wikipedia.org/wiki/Коэффициент_детерминации).

Сделать выводы о качестве, преимуществах и недостатках использованных методов восстановления дискретно заданной функции.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *f* | 0.6 | 2.3 | 2.1 | 3.5 | 4.2 | 6.0 | 7.8 | 9.2 |
|  | *x* | Этот лист заданий заполняется студентами и остаётся у преподавателя | | | | | | | |
| *f* |
| 2 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |

***Контрольные вопросы***

1. Что такое интерполяция, экстраполяция?
2. Что называется, условием интерполирования? Напишите его.
3. Какой вид имеет алгебраический интерполяционный многочлен в форме Лагранжа?
4. Что такое сплайн? Какой вид имеет кубический интерполяционный сплайн?
5. Какое интерполирование точнее и почему – полиномом Лагранжа или кубическим сплайном?
6. В чём суть метода наименьших квадратов в задачах приближения функций?
7. Каков смысл коэффициента детерминации при построении регрессионных моделей?
8. Когда целесообразно использовать интерполяцию, а когда приближение?

**Вычисление определенного интеграла**

Для тех, кто не программирует, во-первых, найдите значение определенного интеграла в вашем варианте с помощью **WolframAlpha** (<http://www.wolframalpha-ru.com/2011/12/wolframalpha_25.html>). Во-вторых, сделайте соответствующее расчётное задание с преподавателем в лаборатории.

Для тех, кто программирует, найдите по формуле Симпсона значение интеграла на двух вариантах сетки интегрирования



с точностью . Оценку точности осуществите по методу Рунге. Указать в каких местах и во сколько раз приходилось измельчать начальную “грубую” сетку интегрирования. Приведите рисунок функции  и полученной сетки интегрирования. Сделайте выводы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  | *a* | *b* |  |
| 1 |  |  |  | 0.001 |
| 2 |  | 0.5 | 0.8 | 0.0001 |
| 3 |  | 2 | 10 | 0.0002 |
| 4 |  | 0.5 | 5 | 0.001 |
| 5 |  |  |  | 0.0005 |
| 6 |  |  |  | 0.001 |
| 7 |  |  |  | 0.01 |
| 8 |  | 0 |  | 0.002 |
| 9 |  | -1 | 2 | 0.0001 |
| 10 |  | 0 |  | 0.005 |
| 11 |  |  |  | 0.002 |
| 12 |  | 0 |  | 0.001 |
| 13 |  | 0 | 25 | 0.00005 |
| 14 |  | 2 | 10 | 0.0001 |

***Контрольные вопросы***

1. Напишите составную формулу численного интегрирования методом прямоугольников.
2. Напишите составную формулу численного интегрирования методом трапеций.
3. Напишите составные формулы численного интегрирования методом парабол с полным шагом и половинчатым.
4. В чём суть метода Рунге для оценки точности численного интегрирования?
5. В чём суть метода Монте-Карло для численного интегрирования? В каких случаях он предпочтительнее квадратурных формул?

**Численное решение задачи Коши**

Решить задачу Коши методом Эйлера и Рунге-Кутта 4-го порядка:

, .

Докажите (для тех, кто программирует и не программирует) для вашего варианта существование решения на заданном отрезке ().

Для тех, кто программирует, решите задачу на трёх сетках при *N* =10, 50, 500. Постройте графики решений для обоих методов на всех сетках. Сделайте выводы.

Для тех, кто не программирует, во-первых, решите задачу с помощью **WolframAlpha** (<http://www.wolframalpha-ru.com/2013/07/wolframalpha_17.html>) с двумя вариантами шагов *h* сетки и двумя методами: Эйлера и Рунге-Кутта 4-го порядка. Сделайте выводы. Во-вторых, сделайте соответствующее расчётное задание с преподавателем в лаборатории.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  |  |
| 1 |  | 2.5 | 1 | 10 |
| 2 |  | 0 |  |  |
| 3 |  | 1 | 0 | 3 |
| 4 |  | 2 | 1 | 3 |
| 5 |  | 10 | -2 | 2 |
| 6 |  | 0.5 | 0 | 5 |
| 7 |  | 0 | 0 | 10 |
| 8 |  | 10 | 0 | 10 |
| 9 |  | 2 | 1 | 5 |
| 10 |  | 0 | 1.5 | 5 |
| 11 |  | 1 | 5 | 50 |
| 12 |  | 0 | 1 | 5 |
| 13 |  | -1 | -10 | 10 |
| 14 |  | 1 | 0 | 1 |

***Контрольные вопросы***

1. Напишите формулу метода Эйлера. Какова погрешность аппроксимаций этого метода?
2. Напишите формулу какого-либо метода Рунге-Кутта. Какова точность этого метода?
3. Как численно вычисляются правая, левая и центральная производные? Какая схема вычислений даёт наименьшую погрешность аппроксимаций?
4. Как погрешность численного дифференцирования зависит от шага дифференцирования?
5. Как численно можно найти вторую производную?
6. Что такое явные и неявные конечно-разностные схемы решения дифференциальных уравнений? Что в них хорошего и плохого?
7. Что такое жёсткость системы обыкновенных дифференциальных уравнений? Физический смысл жёсткости?
8. Как решают задачу Коши в случае дифференциального уравнения высокого порядка?

**Критерии оценивания**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Зачётные модули** | **Форма контроля, баллы** | **Итого баллы** |
| Содержательный модуль 1 | Первые две лаб. работы, до 10 каждая. | 20 |
|  |
|  | Модульная контрольная работа, заданий 2 до 5 каждое. | 10 |
|  | **Итого за модуль 1** | **30** |
| Содержательный модуль 2 | Последние три лаб. работы, до 10 каждая. | 30 |
|  | Модульная контрольная работа, заданий 3 до 5 каждое. | 15 |
|  | **Итого за модуль 2** | **45** |
| Экзамен | Контрольная работа, вопросов 5, до 7 баллов каждый. | **25** |
| Общий итог |  | **100** |